MOSSE ELEMENTARI DI COLONNE

Data una matrice $n \times m$ considero le seguenti mosse elementari di colonne

1. permutare due colonne

2. moltiplicare una colonna per un $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

3. sostituire la colonna i con la (colonna i) + K (colonna j) con $K \in \mathbb{R}$.

Una matrice si dice ridotta a scalini per colonna se:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{sì}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{sì}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{NO}$$

Esercizio Ridurre a scalini per colonne la matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Primo passo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

continuare per esercizio

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \ast & & & & \\ \vdots & & & & \\ \ast & & & & \end{array}\right)$$

Analogamente a quanto visto per le righe vale:

Teorema Data una matrice M $n \times m$ è possibile, usando le mosse di colonna, trasformarla in una matrice a scalini per colonne.

PROPRIETÀ DELLA RIDUZIONE A SCALINI PER COLONNE

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & \quad v_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} | & | & \quad | \\ | & | & \quad | \\ | & | & \quad | \end{pmatrix} \end{array} \qquad n \times m$$

Considero $\langle v_1, \; , v_m \rangle = \operatorname{Span}(v_1, , v_m)$

lo spazio generato dai vettori

v_1, v_m.

<u>Prop</u> Lo spazio generato dalle colonne della matrice non cambia se faccio una mossa di colonna

Il seguente esempio illustra la dim. generale.

Prendiamo 4 vettori v_1, v_2, v_3, v_4

Dim Mossa 1 : scambio le colonne 2 e 3

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \stackrel{?}{=} \langle v_1, v_3, v_2, v_4 \rangle$$

Sì, banalmente

Mossa 2 moltiplico la colonna 2 per 17.

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \stackrel{?}{=} \langle v_1, 17 v_2, v_3, v_4 \rangle$$

$$\| $$

$$\{ \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ a v_1 + b\, 17 v_2 + c v_3 + d v_4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

SI banalmente

Mossa 3 sostituisco v_1 con v_1+2v_2

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle \overset{?}{=} \langle v_1+2v_2, v_2, v_3, v_4\rangle$$

$\supseteq$ facile

infatti un vettore di è

della forma

$$\alpha(v_1+2v_2)+\beta v_2+\gamma v_3+\delta v_4$$

che si può riscrivere (prop. distributiva....)

$$\alpha v_1 + (2\alpha+\beta) v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$$

dunque $\in \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$

Ora studiamo $\subseteq$

sia

$a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4$ un el. di

$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Lo riscrivo così:

$$a(v_1 + 2v_2) + (b - 2a) v_2 + c v_3 + d v_4$$

e si vede dunque che $\in \langle v_1 + 2v_2, v_2, v_3, v_4 \rangle$

<u>Problema</u> Ho 3 vettori in $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Chi è $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$? Che dimensione ha ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lo spazio che cerco è lo spazio generato dalle colonne di questa matrice: se faccio le mosse di colonna, NON CAMBIA!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 16 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a scalini per colonne.

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

SONO LIN INDIP (perché sono "per colonna")

Lo spazio cercato ha base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ e ha dimensione 2.

Rivisitiamo il teorema di completamento ad una base.

LO STUDIEREMO CON LE MOSSE DI COLONNA, MENTRE IL LIBRO USA LE MOSSE DI RIGA, MA IN MANIERA ANALOGA

__Teorema__

Dati $v_1, v_2, , v_K$ LIN. INDIP. in uno spazio V di dim n, è possibile aggiungere dei vettori $w_1, w_2, , w_{n-K}$ in modo che

$v_1, v_2, , v_K, w_1, w_2, , w_{n-K}$ sia una base di V.

__Dim__ Fisso una base $e_1, , e_n$ di V

Scrivo $v_1, , v_K$ come colonne rispetto a questa base.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}_{e_1, \dots, e_n}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}_{e_1, \dots, e_n}$$

e così via

FORMO LA MATRICE

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ v_1 & v_2 & & v_k \end{pmatrix}$$

La riduco a scalini per colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ho K PIVOT

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non appartiene allo spazio generato dalle colonne: LO AGGIUNGO

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

In generale:

aggiungo i vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_{n-k}$$

in corrispondenza degli scalini lunghi

Esempi:

3 colonne.

$$5 \times 3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

aggiungo $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

aggiungo $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

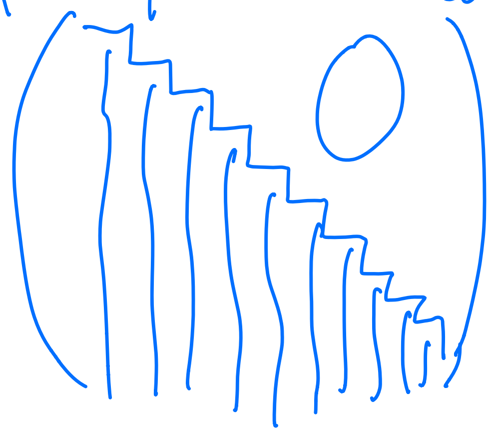
Perché $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}$ è una base?

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} & & & w_1 & w_{n-k} \\ \end{array}$$

$$M = \left(\begin{array}{ccccc} | & | & | & 0 & 0 \\ | & | & | & 0 & 0 \\ | & | & | & 1 & 0 \\ | & | & | & 0 & 0 \\ | & | & | & 0 & 0 \\ | & | & | & 0 & 0 \\ | & | & | & 0 & 1 \\ | & | & | & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} v_1 & & v_k \end{array}$$

Riduco per colonna usando solo le prime k colonne come prima e alla fine permuto le colonne. Ottengo



n PIVOT

Da questo vedo che

$$\langle v_1, , v_k, w_1, , w_{n-k} \rangle = V$$

Inoltre se $v_1, , v_k, w_1, , w_{n-k}$ fossero LIN DIP, vorrebbe dire, come sappiamo, che uno di loro, diciamo v_1, si scrive come combinazione lineare degli altri

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \quad + \beta_1 w_1 + $$
$$+ \beta_{n-k} w_{n-k}$$

Allora posso, partendo dalla stessa matrice iniziale M, fare delle diverse mosse di colonna e "cancellare la prima colonna."

$$\downarrow$$
$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

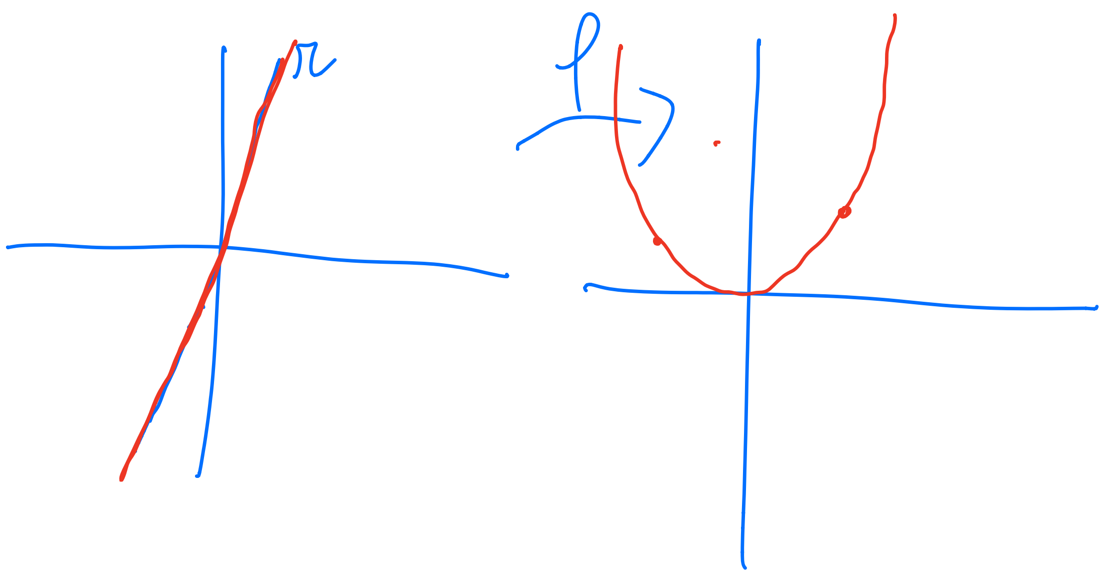
Questo mi porterebbe ad avere una diversa matrice a scalini con $< n$ PIVOT.

Ho un assurdo perché il numero di PIVOT di due diverse riduzioni in forma a scalini per colonna della stessa matrice M deve essere sempre lo stesso, uguale alla dimensione dello spazio generato dalle colonne di M!

$\square$

FUNZIONI

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



Def Dati due spazi vettoriali V e W una funzione $T : V \to W$ si dice APPLICAZIONE LINEARE se soddisfa le seguenti proprietà

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
$$\forall\, v_1, v_2 \in V$$

2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\forall\, v \in V$$

Esempio $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + y \end{pmatrix}$$

è lineare.

Esempio $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x - 3y^2 \\ x + y \end{pmatrix}$$

NON è lineare.